Mathématiques

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 3}$$

2) Considérons la fonction

$$g : x \mapsto \cos(\exp(x) - e) + \frac{3 - x}{2 + (\ln(x))^2}.$$

2.a) Déterminer son domaine de définition.

2.b) Calculer la dérivée de g.

2.c) Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

Réponses :

1.a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ 1.b) $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2-3)^2}$

2.a) $D_g = \mathbb{R}^{+*}$ 2.b) $g'(x) = -e^x \sin(e^x - e) \pm \frac{2 + \ln(x)^2 - \cancel{2}\ln(x)(3/x - 1)}{(2 + \ln(x)^2)^2}$

2.c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Justification et calcul abrégé pour 1.b, 2.b et 2.c :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-3) - 2x(x^2-x-1)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$g'(x) = -\exp(x)\sin(\exp(x) - e) + \frac{-2 - \ln(x)^2 - \frac{2\ln(x)}{x}(3 - x)}{(2 + \ln(x)^2)^2}$$

$$= -e^x \sin(e^x - e) - \frac{2 + \ln(x)^2 + \ln(x)(3/x - 1)}{(2 + \ln(x)^2)^2}$$

c) $g'(1) = -e\sin(0) - \frac{2}{2^2} = \frac{-1}{2}$ et $g(1) = \cos(0) + \frac{2}{2}$
$= 1 + 1 = 2$

D'où l'équation

$$y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x-1) + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

LICENCE de SCIENCES, 1ère année
Mention Sciences du vivant

Nom de l'U.E. : Mathématiques pour les Sciences du Vivant L1 S1.
Responsable : J. Nervi-Gasparini
Contrôle continu du 27 novembre 2012
Durée : 1 heure
Sans document. Sans téléphone. Sans calculatrice.

NUMÉRO D'ANONYMAT :

NUMÉRO DE GROUPE :

Pour chacune des questions de cette épreuve, on demande de donner la réponse puis une justification succincte de celle-ci dans les emplacements prévus. Cela suppose un travail préalable au brouillon, puis le report sur cette feuille des points essentiels des calculs.
Aucune page supplémentaire ne sera acceptée ni corrigée.

QUESTION 1

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
2) Déterminer les solutions complexes de l'équation

$$x^2 - 2i\,x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 0.$$

Réponses :

1) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$ 2) $S = \left\{ \frac{i - \sqrt{3}}{2}, \frac{3i + \sqrt{3}}{2} \right\}$

Justification et calcul abrégé :

On cherche $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ et $|x+iy|^2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1/2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 3/2 \\ 2y^2 = 1/2 \\ xy = \sqrt{3}/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp\sqrt{3}/2 \\ y = \mp 1/2 \\ xy = \sqrt{3}/4 \end{cases}$

D'où $x + iy = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ ou $x + iy = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

Autre possibilité : $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\pi/3}$ On cherche $re^{i\theta}$ tel que

$r^2 e^{i2\theta} = e^{i\pi/3}$ d'où $r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$ (car $r > 0$)
et $2\theta = \pi/3 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
d'où $\theta = \pi/6 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

et $x + iy = e^{i\pi/6}$ ou $e^{i\pi/6 + \pi}$ qui correspondent aux deux solutions déjà trouvées.

2) On calcule $\Delta = (2i)^2 + 4\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4 + \frac{6}{2} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} i = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où $x = \frac{2i - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)}{2} = \frac{i - \sqrt{3}}{2}$ ou

$x = \frac{2i + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)}{2} = \frac{3i + \sqrt{3}}{2}$

QUESTION 2

Calculer les limites de

1) $\frac{2x^2 - 1}{x + 1} - 2x$ lorsque x tend vers $+\infty$;
2) $\frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ lorsque x tend vers 2.

Réponses :

1) -2 2) -7

Justification et calcul abrégé :

$\varphi(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1} - 2x = \frac{-1 - 2x}{x + 1} = \frac{-x(2 + 1/x)}{x(1 + 1/x)} = -\frac{(2 + 1/x)}{(1 + 1/x)}$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\frac{2+0}{1+0} = -2$.

$\psi(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{2x+3}{x-3}$

D'où $\lim\limits_{x \to 2} \psi(x) = \frac{+4+3}{+2-3} = \frac{+7}{-1} = -7$

QUESTION 3

1) Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 3}.$$

1.a) Déterminer son domaine de définition.
1.b) Calculer la dérivée de f.

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

LICENCE de SCIENCES, 1ère année
Mention Sciences du vivant

Nom de l'U.E. : Mathématiques pour les Sciences du Vivant L1 S1.
Responsable : J. Nervi-Gasparini
Contrôle continu du 15 janvier 2013 — Durée : 1 heure
Sans document. Sans téléphone. Sans calculatrice.

NUMÉRO D'ANONYMAT :

NUMÉRO DE GROUPE :

Pour chacune des questions de cette épreuve, on demande de donner la réponse puis une justification succincte de celle-ci dans les emplacements prévus. Cela suppose un travail préalable au brouillon, puis le report sur cette feuille des points essentiels des calculs. Aucune page supplémentaire ne sera acceptée ni corrigée.

QUESTION 1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes et donner pour chacune d'entre-elles son domaine de définition :

1) $f(x) = 5x^6 - x^3 + \sin(\pi x) - \dfrac{5}{x^3}$, 2) $g(x) = \dfrac{6x^2+4}{x^3+2x}$.

Réponses :

1)

2)

Justification et calcul abrégé :

QUESTION 2

À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\cos(2x)\,dx$.

Réponse :

Justification et calcul abrégé :

QUESTION 3

Résoudre le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -3z & = & -5 \\ x & +y & -2z & = & -3 \\ x & -2y & +2z & = & 4 \end{array} \right.$

Réponse :

$(x, y, z) =$

Justification et calcul abrégé :

QUESTION 4

Donner le domaine de définition, étudier les variations et les limites, puis tracer le graphe de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3}$$

Réponses :

Justification et calcul abrégé :