Université de Strasbourg
L1 Sciences de la Vie

12 mars 2012
2ème semestre

Modélisation, Optimisation, Équations différentielles
Session 1, 1ère épreuve – durée : 1h
Responsable : M. Gutnic

N°d'anonymat : B _ _ _ _ _ _ _

Avertissement : Les réponses doivent être effectuées sur l'énoncé et doivent être justifiées. Tous les calculs intermédiaires nécessaires à la compréhension doivent notamment être reportés. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée par le correcteur. Les deux exercices sont indépendants. ***Aucun document ni calculatrice ni portable n'est autorisé.***

Exercice 1 Modélisation et cours

Les scientifiques ont étudié la modélisation de l'évolution d'une population de bactéries. On note $y(t)$ la fonction qui correspond au nombre de bactéries exprimé en millions à un instant t exprimé en heures.

1) Les différentes expériences menées ont montré que dans les premiers instants de la mise en culture des bactéries, la vitesse d'accroissement de leur population est proportionnelle au nombre de bactéries, avec un coefficient de proportionnalité $a > 0$ qui dépend du type de bactérie et du milieu.

Écrire l'équation différentielle satisfaite par y ? Comment s'appelle le modèle de croissance dans cette situation ?

2) Au bout d'un certain temps, les conditions naturelles d'environnement des bactéries (volume du milieu, quantité d'éléments nutritifs, ...) limitent la croissance des bactéries. Les expériences ont montré qu'alors, en plus de la croissance naturelle modélisée au 1), un certain nombre de bactéries disparaissent et ce, proportionnellement au carré du nombre de bactéries avec un coefficient de proportionnalité $b > 0$.

a) Écrire la nouvelle équation différentielle satisfaite par y ? Comment s'appelle le modèle de croissance dans cette situation ? Comment s'appelle le coefficient a ?

b) Effectuer un tracé sommaire (mais soigné) des solutions de cette équation différentielle, en précisant sur le graphique les valeurs importantes pour la compréhension de leur comportement qualitatif (il n'est pas utile ici de faire l'étude qualitative de cette équation différentielle bien connue et déjà vue à plusieurs reprises).

c) Si on considère un type de bactéries pour lequel $a = b = 1$, que se passe-t-il au bout d'un temps très long ?

Exercice 2 Étude qualitative (Attention : dernière question en page 4)

2) Pour un type de bactéries très agressives tel que $a = 4$, les scientifiques ont mis au point un traitement permettant d'augmenter la disparition du nombre de bactéries de deux manières : d'une part, cette disparition se fait désormais par rapport à y^3 ; d'autre part, les scientifiques peuvent désormais augmenter le coefficient de proportionnalité b. Ainsi l'équation différentielle est la suivante :

$$y'(t) = 4y(t) - by^3(t).$$

a) Justifier l'existence et l'unicité de la solution passant par n'importe quel point du plan (t_0, y_0).

b) En précisant soigneusement chaque étape, effectuer l'étude qualitative de cette équation différentielle.

c) En justifiant votre réponse, expliquer pour quelle(s) valeur(s) du coefficient b la population n'excédera pas 1/4 de million de bactéries au bout d'un temps très long.

Université de Strasbourg
L1 Sciences de la Vie

23 avril 2013
2ème semestre

Modélisation, Optimisation, Équations différentielles
Session 1, 2ème épreuve – durée : 1h
Responsable : M. Gutnic

N°d'anonymat : B _ _ _ _ _ _

Avertissement : Les réponses doivent être effectuées sur l'énoncé et doivent être justifiées. Tous les calculs intermédiaires nécessaires à la compréhension doivent notamment être reportés. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée par le correcteur. Les deux exercices sont indépendants.

Aucun document ni calculatrice ni portable n'est autorisé.

Formulaire :
- $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- $\exp(1) = e \simeq 2,718 \quad ; \quad \exp(2) \simeq 7,389$

Exercice 1 Équations différentielles

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$x\,y' - 2\sqrt{y} = 0. \tag{1}$$

a) L'équation différentielle (1) est-elle à variables séparables ?

b) L'équation différentielle (1) est-elle linéaire ?

c) L'équation différentielle (1) admet-elle une ou des solutions constantes, et si oui lesquelles ?

d) Résoudre l'équation différentielle (1) en précisant dans quel(s) intervalle(s) de $\mathbb{R}$ ses solutions sont définies.

e) Déterminer la solution passant par le point $(x = e; y = 1)$.

Exercice 2 Équations différentielles

1) On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$x\,y' - 3\,y = 0. \tag{2}$$

a) Comment s'appelle cette équation différentielle ?

b) La résoudre en précisant dans quel(s) intervalle(s) de $\mathbb{R}$ ses solutions sont définies.

2) On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$x\,y' - 3\,y = 4x. \tag{3}$$

a) Après avoir recherché une solution particulière de cette sous la forme $y = a\,x + b$ (on déterminera a et b), donner la solution générale de l'équation différentielle (3).

b) Déterminer la solution passant par le point $(x = e; y = 1)$.

3) On s'intéresse enfin à l'équation différentielle suivante :

$$x\,y' - 3\,y = x^4\,\cos(x). \tag{4}$$

Résoudre cette équation différentielle en précisant dans quel(s) intervalle(s) de $\mathbb{R}$ ses solutions sont définies. On fera notamment attention au signe de x et on pourra utiliser une intégration par parties.

Université de Strasbourg
L1 Sciences de la Vie

14 mai 2013
2ème semestre

Modélisation, Optimisation, Équations différentielles
4ème épreuve – durée : 1h
Responsable : M. Gutnic

N°d'anonymat : B _ _ _ _ _ _ _

Avertissement : Les réponses doivent être effectuées sur l'énoncé et doivent être justifiées. Tous les calculs intermédiaires nécessaires à la compréhension doivent notamment être reportés. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée par le correcteur. Les deux exercices sont indépendants.

Aucun document ni calculatrice ni portable n'est autorisé.

Exercice 1 Quelques définitions

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) Quelle est la notation usuelle de l'élément de A qui vaut 0 ci-dessus ?

2) Pour ce même élément, que représente, comment note-t-on et quelle est la valeur du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

3) Comment note-t-on et que vaut le cofacteur de l'élément $a_{3,2} = -1$?

4) Que vaut le déterminant de A ?

5) On rappelle qu'une matrice M est nilpotente d'indice de nilpotence n lorsque M^n est la matrice nulle. Montrer que la matrice A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Exercice 2 Algèbre

Pour produire une certaine substance, une entreprise d'industrie chimique utilise trois ingrédients différents A, B, et C. Les trois ingrédients doivent être dissous dans l'eau séparément avant qu'ils agissent l'un sur l'autre pour former la substance chimique.

Lorsqu'on combine 3 solutions contenant respectivement 1g/cm^3 de A, 4g/cm^3 de B et 5g/cm^3 de C, on obtient 25g de la substance recherchée. Pour des volumes de solution identiques, si les concentrations respectives en A, B et C sont respectivement de 2, 4 et 2g/cm^3, on obtient 23g de la substance et si elles sont respectivement 2, 5 et 3g/cm^3, on obtient 28g de la substance. On résume ces données dans le tableau suivant :

Concentrations (en g/cm^3)			Quantité de substance (en g)
A	B	C	
1	4	5	25
2	4	2	23
2	5	3	28

1) On note x, y et z les volumes (en cm^3) des solutions contenant respectivement les ingrédients A, B, et C. Donner le système linéaire satisfait par x, y et z.

2) Mettre ce système sous la forme matricielle $AX = B$, en précisant A, X et B.

3) Calculer le déterminant de la matrice A.

4) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse et en déduire la valeurs des coûts journaliers x, y et z. (De façon alternative, on pourra utiliser la méthode de Cramer pour déterminer x, y et z)